DNB session 2019 série générale

Correction

Exercice 1 (10 points)

1. Décomposition en produits de facteurs premiers :

$69 = 3 \times 23$ | $1\,150 = 2 \times 5^2 \times 23$ | $4140 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23$

2. Partage total et équitable :

Puisque toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués, on cherche un diviseur23 commun entre ces trois nombres $69, 1150$ et 4140.

On remarque, d'après la question 1. Qu'il s'agit de 23.

Il y a alors 23 marins sur ce navire.

Exercice 2 (19 points)

1. Montrons que [AM] mesure environ 3,46 m :

Le triangle ADM est rectangle en A. On a la mesure de l'angle $\widehat{ADM}$ et la mesure de son côté adjacent. On cherche la mesure de son côté opposé. On a alors : $\tan\left(\widehat{ADM}\right) = \frac{AM}{AD}$

$$\tan(60) = \frac{AM}{2}$$

$$AM = 2 \times \tan(60)$$

$$\boldsymbol{AM \sim 3,46\ m.}$$

2.

- Calculons d'abord l'aire totale de la plaque :

$$A_{ABCD} = 4 \times 2 = 8\ m^2$$

- Calculons ensuite l'aire de la partie quadrillée :

$$A_{MBCN} \sim (4 - 3{,}46) \times 2 = 1{,}08\ m^2$$

- <u>Calculons enfin la proportion de la plaque qui n'est pas utilisée :</u>

$$\frac{A_{MBCN}}{A_{ABCD}} = \frac{1,08}{8} \sim 0,13$$

Donc la valeur approchée au centième de la proportion de la plaque qui n'est pas utilisée est 0,13.

3. <u>Démontrons que les trois triangles AMD, PNM et PDN sont semblables :</u>

- Le triangle AMD est rectangle en A, l'angle $\widehat{ADM}$mesure $60°$.

Or, dans un triangle, la somme des trois angles vaut $180°$.

$180 - 90 - 60 = 30$. Donc l'angle $\widehat{DMA}$ mesure 30°.

- Le triangle PDN est rectangle en P.

L'angle $\widehat{ADN}$ mesure 90° (angle droit du rectangle ABCD) et l'angle $\widehat{ADM}$ mesure 60°.

90-60=30. Donc l'angle $\widehat{MDN}$ mesure 30°.

Ainsi, comme précédemment, le troisième angle de ce triangle est le complément à 180°.

Donc l'angle $\widehat{DNP}$ mesure 60°.

- Le triangle PNM est rectangle en P.

L'angle $\widehat{AMN}$ mesure 90° (angle droit du rectangle ABCD) et l'angle $\widehat{AMD}$ mesure 30°.

90-30=60. Donc l'angle $\widehat{DMN}$ mesure 60°.

Ainsi, comme précédemment, le troisième angle de ce triangle est le complément à 180°.

Donc l'angle $\widehat{MNP}$ mesure 30°.

Nos trois triangles sont rectangles avec les angles aigus identiques. Ils sont donc semblables.

4.

- <u>Calculons l'hypoténuse du triangle AMD</u> : (on peut aussi calculer un des côtés de l'angle droit du triangle PDN)

AMD est un triangle rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$DM^2 = AD^2 + AM^2$

$DM^2 \sim 2^2 + 3,46^2$

$DM^2 \sim 15,9716$

$DM \sim$ 3,997 m

- Comparons alors les hypoténuses des deux triangles :

$$\frac{DM}{DN} = \frac{3{,}997}{3{,}46} \sim 1{,}15$$

Donc le coefficient d'agrandissement pour passer de PDN à AMD est bien plus petit que 1,5.

(On aurait pu utiliser la trigonométrie au lieu du théorème de Pythagore)

Exercice 3 (17 points)

1.

a.

- Calculons le volume du cylindre C_2:

$V = \pi r^2 \times h$

$V = \pi \times 0{,}75^2 \times 4{,}2 \sim 7{,}42\ cm^3$

- Calculons le volume occupé par le sable :

Le sable remplit le cylindre aux deux tiers : $7{,}42 \times \frac{2}{3} \sim \mathbf{4{,}95\ cm^3}$

b. Le sable va s'écouler en 2 min et 30 secondes car :

1,98 cm^3	1 minute
4,95 cm^3	$\frac{4{,}95 \times 1}{1{,}98} = 2{,}5\ minutes$

2.

a. $1 + 1 + 2 + 6 + 3 + 7 + 6 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3 = 40$

40 tests ont été réalisés au total.

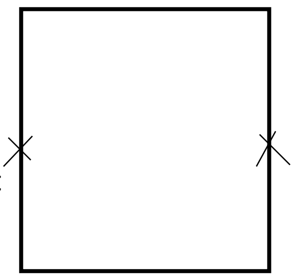
b. Vérifions les trois conditions de mise en vente :

- *Etendue :* Il y a bien moins de 20 s entre 2 min 22 s et 2 min 38 s.
- *Médiane :* Il y a 40 tests au total. La médiane se trouve alors entre le 20ème et le 21ème test, soit entre 2 min 29 s et 2 min 30 s. La médiane correspond bien à la condition (entre 2 min 29 s et 2 min 31 s).
- *Moyenne :* On peut calculer la moyenne des secondes puisqu'on a toujours 2 min. On obtient alors une moyenne de 2 min et 30,1 s, qui est bien entre 2 min 28 s et 2 min 32 s.

Donc le sablier ne sera pas éliminé.

Exercice 4 (19 points)

1. 10 pixels correspondent alors à 5 cm. On trace alors un carré de 5 cm de côté :



2. Le script 1 correspond au dessin B car on répète 23 fois l'alternance de carré et de tiret. Le script 2 correspond au dessin A.

3. On exécute le script 2.

a. Il y a deux éléments possible, la probabilité d'obtenir un carré est alors de $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

b. La probabilité que le second élément soit un carré sachant que le premier est un carré est de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$ (On peut aussi réaliser un arbre des probabilités)

4. On insère dans le script 2, dans la boucle « répéter » et **avant la ligne 7** :
Si < nombre aléatoire entre 1 et 2 = 1> **alors**
Mettre la couleur du stylo à rouge
Sinon
Mettre la couleur du stylo à noir

Exercice 5 (18 points)

1.

a. Le rectangle ***3*** est l'image du rectangle ***4*** par la translation qui transforme C en E.

b. Le rectangle 3 est l'image du rectangle ***1*** par la rotation de centre F et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

c. Le rectangle ABCD est l'image du rectangle ***2*** par l'homothétie de centre ***D*** et de rapport 3. ou Le rectangle ABCD est l'image du rectangle ***4*** par l'homothétie de centre ***C*** et de rapport 3.

2. Calculons l'aire du petit rectangle :

$1{,}215 \div 3^2 = \mathbf{0{,}135\ m^2}$ car le grand rectangle ABCD est un agrandissement de rapport 3 d'un petit rectangle.

3. Appelons x la longueur du rectangle ABCD et y sa largeur :

Le ratio longueur : largeur est égale à 3 : 2

3	2
x	y

Ainsi $2x = 3y$

$x = \frac{3}{2}y$

De plus, l'aire du rectangle ABCD égale à 1,215 m² : $xy = 1{,}215$

Ainsi : $\frac{3}{2}y^2 = 1{,}215$

$y^2 = \frac{2}{3} \times 1{,}215$

$y^2 = 0{,}81$

$y = 0{,}9\ m$ et $x = \frac{3}{2} \times 0{,}9 = 1{,}35\ m$

Donc la longueur du rectangle ABCD mesure 1,35 m et sa largeur mesure 0,9 m.

Exercice 6 (17 points)

1.

Programme 1 :

5

$5 \times 3 = 15$

$15 + 1 = \mathbf{16}$

Programme 2 :

5

$5 - 1 = 4$ et $5 + 2 = 7$

$4 \times 7 = \mathbf{28}$

2.

a. $\boldsymbol{A(x) = 3x + 1}$

b. $A(x) = 0$

$3x + 1 = 0$

$3x = -1$

$x = \frac{-1}{3}$

Pour obtenir 0 avec le programme 1, il faut choisir $\frac{-1}{3}$ au départ.

3. $B(x) = (x - 1)(x + 2)$

$B(x) = x^2 + 2x - x - 2$

$B(x) = x^2 + x - 2$

4.

a.

$B(x) - A(x) = (x^2 + x - 2) - (3x + 1)$	Et $(x+1)(x-3) = x^2 - 3x + x - 3$
$B(x) - A(x) = x^2 + x - 2 - 3x - 1$	$(x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$
$B(x) - A(x) = x^2 - 2x - 3$	Les deux expressions sont bien égales.

b. Pour que les deux programmes donnent le même résultat, il faut que $B(x) = A(x)$

Soit que $B(x) - A(x) = 0$

Ainsi, d'après la question précédente : $(x+1)(x-3) = 0$

On a alors soit $x + 1 = 0$ soit $x - 3 = 0$

$x = -1$ ou $x = 3$

Pour que les deux programmes donnent le même résultat, il faut choisir au départ -1 ou 3.